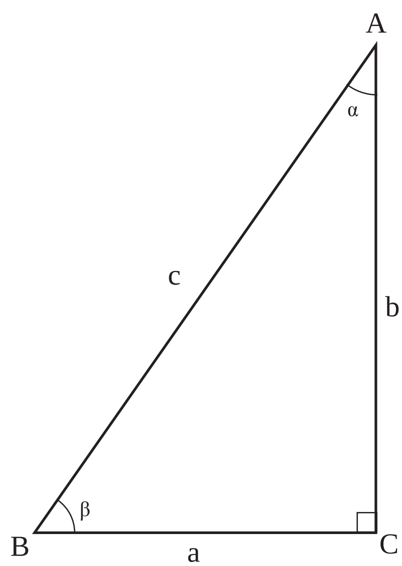
اثبات یک رابطهٔ مثلثاتی

مصطفی مرادی
دانش‌آموز سوم ریاضی
دبیرستان نمونهٔ تربیت
خراسان جنوبی
بیرجند

در این مقالــه می‌خواهیم رابطهٔ مثلثاتی زیر را (که قبلاً استنتاج شده است) به روش هندسی اثبات کنیم:

$$\tan(\frac{\alpha}{۲}) = \csc\alpha - \cot\alpha \quad (\csc\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha})$$

بــرای اثبــات، با توجه به شــکل ۱ کــه یک مثلث قائم‌الزاویهٔ دلخواه است، رابطه را کمی تغییر می‌دهیم:



شکل ۱

$$\csc\alpha = \frac{c}{a}$$

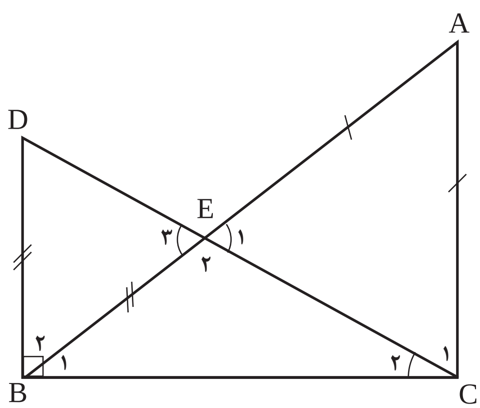
$$\cot\alpha = \frac{b}{a}$$

حال باید ثابت کنیم:

$$\tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} \Rightarrow a\tan\frac{\alpha}{۲} + b = c$$

بــا اثبات رابطهٔ بالا که از رابطهٔ اول اســتنتاج شــد، رابطهٔ اصلی هم اثبات می‌شــود. پس به اثبات این رابطه می‌پردازیم:

اثبات



شکل ۲

نقطهٔ E را طوری روی ضلع AB انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: AE=AC.

بــا پاره‌خطــی دو نقطــهٔ E و C را به‌هــم متصــل می‌کنیم. در نتیجه مثلث AEC تشــکیل می‌شــود که متساوی‌الساقین است و:

$$AE = AC$$

$$C_۱ = E_۱$$

اکنون ثابت می‌کنیم: $C_۲ = \frac{A}{۲}$:

$$C_۱ = \frac{۱۸۰ - A}{۲}$$

$$C_۲ = ۹۰ - (\frac{۱۸۰ - A}{۲}) \Rightarrow ۹۰ - (۹۰ - \frac{A}{۲}) = \frac{A}{۲}$$

از نقطـهٔ B بر پاره‌خط BC عمود می‌کنیم تا امتداد ضلـع EC را در نقطهٔ D قطع کند. اندازهٔ ضلع DB برابر است با:

$$\tan C_۲ = \frac{DB}{CB} \Rightarrow DB = CB \tan C_۲$$

دو مثلث DEB و AEC به حالت (زز) با هم متشابه هستند.

در نتیجه چون مثلث AEC متساوی‌الساقین بود دو ضلع DB و EB نیز با هم برابرند:

$$DB = EB$$

$$AE + EB = AB$$

$$CB \tan C_۲ = EB \Rightarrow BC.\tan\frac{A}{۲} = EB$$

جمـع دو ضلع AE و EB برابر AB اسـت که AB همان وتر مثلث ABC است. و: AE=AC.

$$EB = BC.\tan\frac{A}{۲} \Rightarrow BC.\tan\frac{A}{۲} + AC = AB$$

$$BC.\tan\frac{A}{۲} + AC = AB$$

که با توجه به شکل ۱:

$$a\tan\frac{\alpha}{۲} + b = c$$

در نتیجـه رابطهٔ مثلثاتی زیر برای هر زاویه‌ای ثابت می‌شود:

$$\tan(\frac{\alpha}{۲}) = \csc\alpha - \cot\alpha$$